PRIMO APPELLO DI COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA LM

12/01/2016
(Comm. Prof. F. Ferrari)

Cognome.................................Nome..............................Mat......................CdL.............

Esercizio 1 [7 punti]
Sia $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ così definita

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in [0, \pi], \\ -x, & x \in [-\pi, 0[. \end{cases}$$

Scrivere la serie di Fourier associata a f calcolando esplicitamente i coefficienti. La serie di Fourier così ottenuta converge puntualmente in $x = \frac{\pi}{3}$? Converge puntualmente in 0? Rispondere fornendo le adeguate motivazioni.

Esercizio 2 [12 punti]
Determinare una soluzione del seguente problema utilizzando il metodo della separazione delle variabili.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x^2, \ \ x \in (0, \pi), \ \ t > 0 \\ u(x, 0) = -x, \ \ x \in [0, \pi], \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \ \ t > 0. \end{cases}$$

Esercizio 3 [7 punti] Studiare qualitativamente il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \arcsin\left(\frac{3y^2}{3x^2+3y^2+2}\right) \\ y(0) = 2, \end{cases}$$

determinando, in particolare, una funzione che approssimi la soluzione a meno di un $o(x^2)$ per $x \to 0$. Motivare le risposte con particolare riferimento a: esistenza, unicità, regolarità e dominio massimale.

Esercizio 4 [4 punti] Siano $f(x) = \chi_{[-1,1]}(x)$ la funzione caratteristica dell'intervallo $[-1, 1]$ e $g(x) = \chi_{[-2,2]}(x)$. Scrivere $f * g$ (la convoluzione delle due funzioni) e poi calcolare $\mathcal{F}(f * g)$ (cioè la trasformata di Fourier di $f * g$).

Date: 12/01/2016.